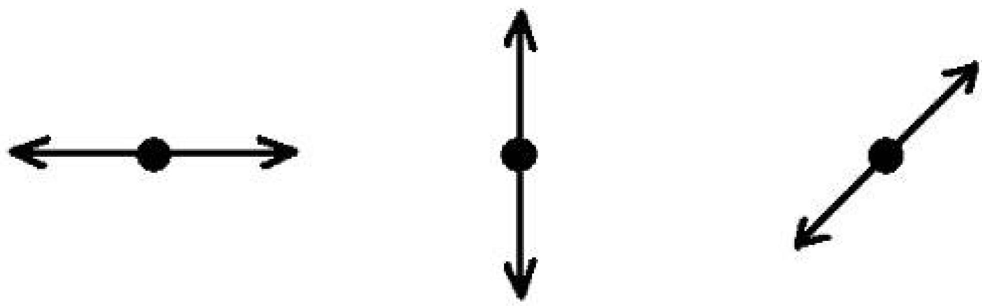
Unidad 1

"Cinemática de la Partícula"

Introducción

Cuando estudiamos algo, sea lo que sea, tratamos de facilitarnos el trabajo, y comenzamos intentando comprender lo más simple primero. Una vez que nos sentimos cómodos con eso, le agregamos a nuestro objeto algún grado de complejidad que nos brinde más herramientas; y así, vamos profundizando y aumentando nuestro conocimiento (a veces sin darnos cuenta). Misma cosa que para un/a infante a quien se le enseña a moverse; primero gatea, luego se para, más tarde camina, después aprende a manejar una bicicleta, etc. etc.

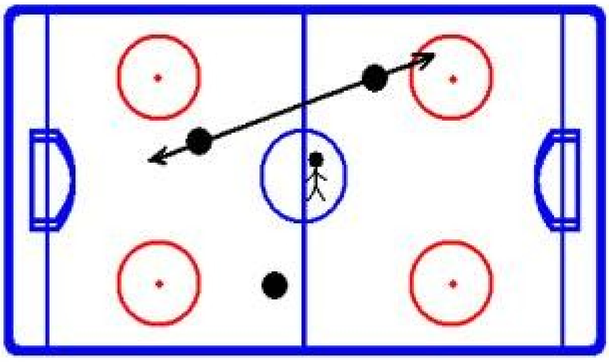
Con el estudio del movimiento o cinemática de los cuerpos o partículas pasa exactamente eso. Primero analizamos cómo funciona la cosa cuando el cuerpo se mueve en una dimensión; ésto es, en un sentido u otro de una misma dirección: para adelante o atrás, para arriba o abajo, de Nor-este a Sud-oeste… Definimos y desarrollamos conceptos físicos pertinentes a esos movimientos, como son la posición, la velocidad y la aceleración que tiene el cuerpo en cualquier momento de su movimiento, y las relaciones entre estas magnitudes.



Los autos que se mueven por una calle o ruta se comportan de esta manera. Su posición relativa a la calle es hacia adelante o atrás, al igual que su velocidad (que indica la variación de su posición, en cantidad y en sentido) como su aceleración (que indica la variación de su velocidad, en cantidad y en sentido).

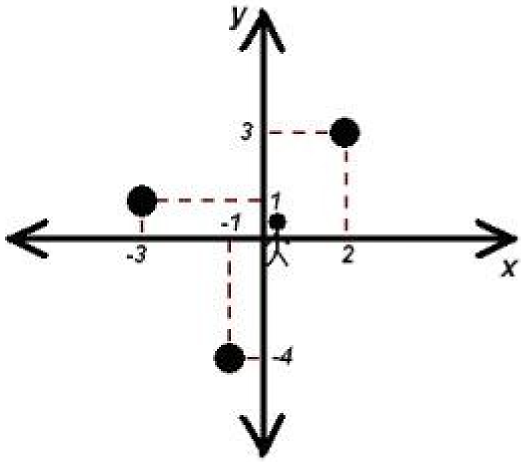
Cuando creemos que todo esto resulta bastante evidente, le agregamos, como dice el primer párrafo, un grado de complejidad; más específicamente, una dimensión más. Ya no estudiamos movimientos unidimensionales - ahora trabajamos sobre cuerpos o partículas que se mueven de manera bidimensional, o en dos dimensiones. El "*puck*" del hockey sobre hielo es un ejemplo: los jugadores lo transportan a lo largo y ancho de la pista.

Quizás para diferenciar los dos casos de movimiento hasta ahora citados, podemos pensar así: en un movimiento unidimensional, todas las posiciones en que podemos encontrar al cuerpo o partícula están alineadas en una recta; en cambio, para los movimientos bidimensionales, existen posiciones que no forman parte de la recta de otras posiciones (como se ilustra en la siguiente figura).



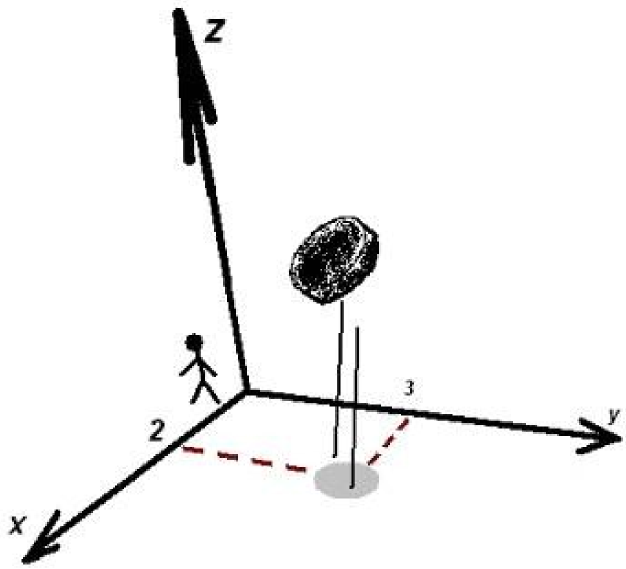
Un árbitro situado en el centro de la pista puede expresar la posición del "*puck*" diciendo qué tan lejos de él está el "*puck*" a lo largo (que en la figura nosotros observamos de izquierda a derecha) y a lo ancho (que en la figura nosotros observamos de arriba a abajo).

El árbitro entonces viene a ser como el origen de coordenadas de un par de ejes, que por convención llamamos ***x*** e ***y***, y el "*puck*" siempre tiene una coordenada o componente horizontal (en el eje ***x***) y otra vertical (en el eje ***y***). Cabe ir aclarando: lo mismo se aplica para las velocidades y aceleraciones, que también tendrán componentes horizontales y verticales.



Por supuesto, estamos pensando en vertical simplemente como otra dimensión de la pista, que es plana y no tiene altura – es decir, estamos pensando que el "*puck*" siempre se mueve sobre la pista, sin levantarse de ella. En el hipotético y absurdo caso de que el "*puck*" decidiera saltar por sus propios medios, ocuparía las mismas coordenadas de ***x*** e ***y*** en la pista, pero ahora estaría fuera de ella, en el aire – sería necesario entonces introducir una nueva dimensión para poder expresar el valor de su altura en el salto.

A esa nueva dimensión (continuando con el abecedario) se la suele llamar ***z***, y con ella ya podemos determinar cualquier posición de un cuerpo, como el "*puck*", en nuestro espacio de tres dimensiones, que es en el que vivimos y respiramos.



Algunas montañas rusas siguen esta idea; sus idas y vueltas en todo tipo de direcciones hacen que no podamos limitarlas en un plano (al igual que no podemos limitar el movimiento del “*puck*”, que ahora se mueve por el aire a su antojo).

Ponernos a hablar de movimientos cuatridimensionales es meternos en terrenos bastante filosóficos, y los tridimensionales resultan bastante complejos de por sí, por lo que (al igual que el/la infante se para antes de caminar) será cuestión de estudiar primero movimientos bidimensionales. De eso trata la primera unidad.

Tiro Oblicuo

Algunas observaciones previas

De ahora en más, consideraremos "*cuerpo*" y "*partícula*" sinónimos. Nos dará lo mismo que Diego caiga desde un edificio moviendo los brazos, o con ellos atados. La idea es que veremos a los cuerpos de la misma manera que desde las plateas más altas se ven a los jugadores en la cancha de fútbol: como puntos o partículas. Es obvio que estamos simplificando groseramente a los movimientos reales. A veces ésto es necesario para estudiar lo fundamental en un fenómeno físico. Misma cosa para la pelota: desde la platea también se la ve como un punto, sin apreciar sus movimientos rotatorios. Es cierto. Nosotros los ignoraremos, y haremos de cuenta que la pelota es un punto o partícula que no rota alrededor su eje y simplemente se traslada (para aquellos que se dediquen a la Ingeniería: la rotación será uno de los contenidos que trabajarán probablemente en "*Física I*").

Otra simplificación que haremos será con el medio ambiente, haciendo de cuenta que el aire no ofrece resistencia al movimiento. En la naturaleza, ésto no es así, y los movimientos ciertamente están influenciados por el aire (que hace que, por ejemplo al caer, no aceleremos infinitamente). Nosotros pensaremos que solo la gravedad modifica la trayectoria de un cuerpo que vuela.

La última observación es acerca de los ejes; en el ejemplo de la pista de hockey, mencionamos al eje ***z*** como aquel que mide la altura en movimientos tridimensionales. Dicho ésto, como nosotros analizaremos movimientos con altura pero bidimensionales, no necesitaremos más que dos ejes, y por lo tanto solo dos letras; de ahí que al eje de alturas lo llamemos ***y*** (y al otro ***x***).

Tiro Oblicuo

Las palabras no esconden demasiado. Si por "*Tiro Vertical*" entendíamos el comienzo del movimiento de un cuerpo lanzado (o tirado) en forma vertical, por "*Tiro Oblicuo*" entenderemos el movimiento de un cuerpo que es lanzado (o tirado) de manera oblicua – en castellano: en diagonal.

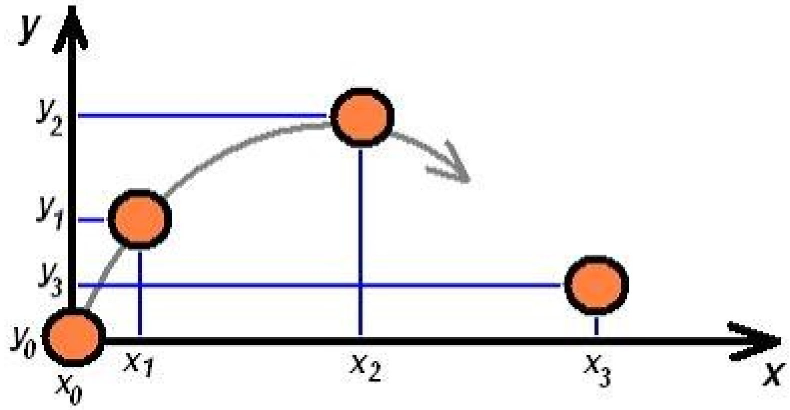
Ésto es lo que ocurre cuando un basketbolista tira - si tira vertical, le caerá encima; si tira horizontal, es imposible que llegue incluso a tocar la red. Todo ésto siempre y cuando no hayan otros jugadores dando vuelta. Que le puedan robar. Así que para simplificar, pensemos en alguno de nosotros practicando '21'.

En nuestro afán de embocar, tiramos la pelota de manera oblicua para que, por un lado, avance hacia delante hasta el aro, y por el otro, gane altura. Si la pelota se mueve tanto para adelante como para arriba, sin dudas en todo momento tendrá una posición horizontal (ésto es, qué tanto se alejó de nosotros hacia el aro) y otra vertical (qué tanto se alejó de nosotros hacia el cielo).

Si nosotros al tirar nos quedamos en ese lugar, serviremos de referencia para el movimiento de la pelota. Dicho en otras palabras: diremos cuántos (por ejemplo) metros se adelantó la pelota, y cuántos metros subió (igual que el árbitro del ejemplo del hockey describía la posición del "*puck*").

¿Hasta acá vamos bien? Sino, se vuelven a leer los últimos dos párrafos, porque ahora la cosa se pone abstracta.

Como referiremos al movimiento de la pelota desde nuestra perspectiva (pues al fin y al cabo estamos quietos y nos autoproclamamos referencia), podemos pensar que somos el origen o centro de coordenadas de un par de ejes, como el árbitro en la pista. En los ejes encontraremos las diferentes coordenadas horizontales y verticales de la pelota durante su trayectoria.



En la figura, los valores x_0, x_1, x_2 y x_3 son las coordenadas horizontales de la pelota en cuatro momentos distintos de su movimiento, y los valores y_0, y_1, y_2, e y_3 son las coordenadas verticales en esos mismos momentos.

Ahora, no tiene sentido numerar todas las coordenadas, porque son infinitas: la trayectoria es un trazo continuo, y por lo tanto hay infinitas posiciones que ocupa la pelota en el aire. Aun así, tres posiciones de la pelota nos resultarán útiles (o se pedirán en ejercicios): la inicial (donde tanto x como y llevan el subíndice ***0***), la de altura máxima (donde escribimos $y_{máx}$) y la final o de alcance máxima (donde escribimos $x_{máx}$).

Por supuesto que cuando los subíndices de ***x*** e ***y*** son iguales, quiere decir que son las coordenadas de la pelota (o en general de la partícula) en un mismo momento en el tiempo, o en un mismo ***t***. Es aquí donde cabe preguntamos ¿cómo hacer para determinar las coordenadas de la partícula en un momento determinado (por ejemplo, dónde está la pelota pasados 2 segundos de haber sido tirada)? o ¿cómo hacer para saber en qué momento la partícula tiene ciertas coordenadas conocidas (por ejemplo, cuánto tiempo pasa hasta que está en su altura máxima)?

Para responder esas preguntas, pensemos que deben haber ecuaciones, o más bien, funciones de la posición en el tiempo, que permitan calcular una variable conociendo la otra. Seguramente se recuerde lo siguiente:

$$x(t) = v_0 . t + x_0$$

Lo anterior lo solíamos utilizar para calcular la posición en función del tiempo al trabajar con *MRU*s (movimientos rectilíneos donde no hay aceleración), generalmente horizontales.

También sonará conocido esto:

$$y(t) = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_0 .t + y_0$$

A esa otra función se la empleaba para conocer la altura en función del tiempo de un cuerpo en “*Tiro Vertical*”/“*Caída Libre*”.

Bueno, esas dos funciones son las que se utilizan en “*Tiro Oblicuo*” (o como a veces se le dice, “*Movimiento de Proyectiles*”) para determinar las coordenadas horizontal (***x***) y vertical (***y***) de la posición de un cuerpo en un momento (para un cierto ***t***) determinado. Solo que se les efectúa una pequeña modificación a cada una, quedando así:

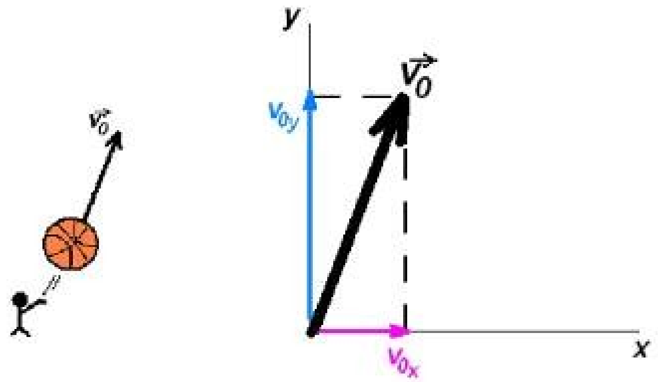
$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = v_{0_x} .t + x_0 \\ \hline y(t) = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_{0_y} .t + y_0 \end{array}}$$

En definitiva; tenemos 2 funciones que permiten calcular las coordenadas horizontales y verticales de la pelota en cualquier momento que se desee, y que involucran otros datos:

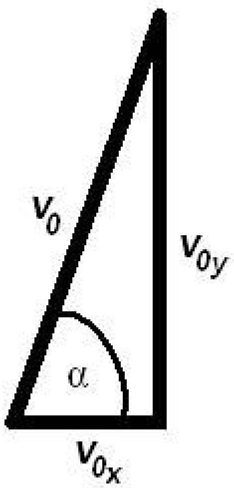
- ***g*** (la aceleración de la gravedad, y que tomaremos como 9,8 mts/seg^2),
- x_0 e y_0 (las coordenadas iniciales de la pelota, normalmente conocidas),

- y v_{0x} y v_{0y} (las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial o de tiro).

Ésto último suele causar confusión; *“¿componentes de la velocidad?”* Pues claro: si dijimos que la pelota se movía en un plano de dos dimensiones, y por lo tanto su posición puede ser descompuesta en ***x*** e ***y***, ¿por qué no iba a poder hacerse lo mismo con la velocidad?



La velocidad inicial, entonces, tiene una componente horizontal (v_{0x}) y otra vertical (v_{0y}). ¿Cómo determinar sus valores? Con lo que sabemos de trigonometría (alcanza).



Podemos pensar a v_0 como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Es claro que, conociendo el ángulo que forma con la horizontal (o sea, con el eje ***x***), podemos encontrar relaciones que permitan calcular las componentes (o sea, los catetos del triángulo), ya que:

$$\cos\alpha = v_{0x}/v_0 \longrightarrow \boxed{v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = v_{0y}/v_0 \longrightarrow \boxed{v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

Por suerte, la aceleración solamente tiene componente vertical (con la magnitud que ya conocemos), así que no es necesario descomponerla a ella también.

¡Aguantar un rato más, que ya terminamos con las fórmulas!

Hasta ahora dijimos que podemos calcular las coordenadas horizontales y verticales de la posición de la pelota o de lo que sea que se mueve, en función del tiempo y de conocer las componentes de la velocidad inicial del cuerpo. Con las figuras de arriba encontramos expresiones para determinar los valores de dichas componentes. Ahora, ¿podemos determinar las componentes de la velocidad en cualquier momento (para cualquier ***t***) del movimiento?

La respuesta es sí, y fácil. Pensemos un poco; dijimos que el movimiento horizontal de la pelota era uniforme – su velocidad en esa dirección es constante. Por lo tanto siempre tiene el mismo valor, el valor que tuvo al principio (es decir $\boldsymbol{v_{0x}}$). Por otro lado, en el movimiento vertical, que no es otra cosa que "*Tiro Vertical*"/"*Caída Libre*", la velocidad inicial ($\boldsymbol{v_{0y}}$) de la pelota va siendo afectada constantemente por la aceleración de la fuerza gravitatoria (***g***), que hace que eventualmente la pelota deje de subir y caiga. Así:

$$v_x(t) = v_{0x}$$

$$v_y(t) = -\,g.t + v_{0y}$$

Así, podemos calcular las componentes de la velocidad de la pelota en cualquier momento del vuelo (por supuesto, conociendo de antemano la velocidad inicial), al igual que podíamos con la posición. Recordar que en el momento en que la partícula en movimiento está en su altura máxima, su velocidad vertical ($\boldsymbol{v_{0y}}$) es nula (al igual que en "*Tiro Vertical*").

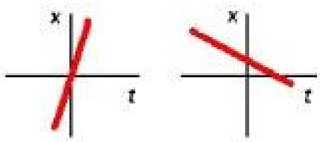
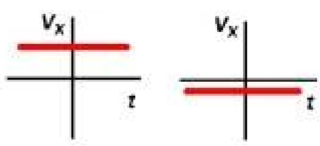
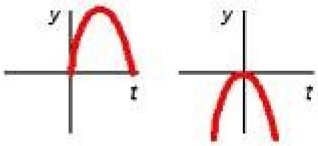
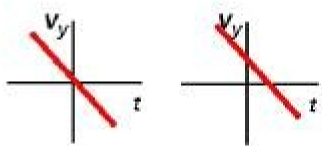
Resumen

Aceleración

$a_x(t) = 0$
no varía con el tiempo
$a_y(t) = -\,g = -\,9{,}8\ m/s^2$
no varía con el tiempo

Descomposición de la velocidad inicial

$v_{0x} = v_0 \,.\, \cos\alpha$
$v_{0y} = v_0 \,.\, \operatorname{sen}\alpha$

Horizontal	**Posición** $x(t) = v_{0x}.t + x_0$		*rectas no horizontales cuyas pendientes son la velocidad inicial horizontal y cuyas ord. al origen son la posición inicial horizontal*
	Velocidad $v_x(t) = v_{0x}$ *no varía con el tiempo*		*rectas horizontales cuyas ord. al origen son la velocidad inicial horizontal*
Vertical	**Posición** $y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_{0y}.t + y_0$		*parábolas de amplitud -1/2 g cuyas ord. al origen son la posición inicial vertical*
	Velocidad $v_y(t) = -\,g.t + v_{0y}$		*rectas no horizontales cuyas pendientes son la aceleración de la gravedad y cuyas ord. al origen son la velocidad inicial vertical*

Encontramos funciones de las coordenadas de posición y velocidad de la pelota en el tiempo (el tiempo es la variable independiente y las demás son variables dependientes de él). Estas funciones ciertamente pueden representarse gráficamente. En la tabla anterior, entonces, se presenta un resumen de las funciones para cada variable de cada movimiento, con ejemplos de sus gráficas.

Hace varios cientos de años, Galileo descubrió que el movimiento horizontal y el vertical eran independientes uno del otro. Además, queda claro que la trayectoria que sigue el cuerpo es (parte de) una parábola: basta con despejar t de la ecuación de posición horizontal, reemplazar lo obtenido en la ecuación de posición vertical, y ver que lo que queda para ***y(t)*** es una función cuadrática.

Por supuesto, todo dependerá del problema que se trabaje; a veces, la posición inicial será aquella de altura máxima. A veces, se podrán conocer las componentes de la velocidad inicial, y con ellas determinar qué magnitud y dirección tenía (a diferencia del caso del basketbolista, donde era al revés).

Ejemplo

Supongamos que, practicando 21, el basketbolista tira la pelota con velocidad inicial de 20 m/s a 60º de la horizontal; ¿cómo determinamos:

a) la altura máxima a la que llega la pelota?

b) el tiempo que tarda en caer al suelo?

c) la velocidad pasados 2 segundos?

---

a) La altura máxima a la que llega la pelota la podríamos calcular utilizando la fórmula para (justamente) calcular alturas…

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g.t^2 + v_{0_y}.t + y_0$$

… pero al parecer nos faltan datos. ¿Qué valores les asignamos a las variables?

Bueno, a v_{0y} lo podemos calcular por trigonometría:

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v_0\,.\,\text{sen}\,\alpha \\ &= 20\ m/s\,.\,\text{sen}\ 60° \\ &= 20\ m/s\,.\,0{,}866... = 17{,}32\ m/s \end{aligned}$$

¿Qué más nos falta? y_0 es la altura de la cual sale la pelota con respecto al suelo. Como la pelota la tira un basketbolista, vamos a suponer, para tener números redondos, que $y_0 = 2\ m$.

Sabemos el valor de ***g***, pero entonces lo que nos queda es averiguar el tiempo que nos devolverá la altura máxima. ¿Cómo conseguir ese tiempo ***t***? De la fórmula para la velocidad:

$$v_y(t) = -g.t + v_{0y}$$
$$0 = -9{,}8\ m/s^2 .\ t + 17{,}32\ m/s$$
$$9{,}8\ m/s^2 .\ t = 17{,}32\ m/s$$
$$t = \frac{17{,}32\ \cancel{m/s}}{9{,}8\ \cancel{m/s^2}} = 1{,}77\ s$$

Si reemplazamos todos los valores recién determinados en la primera fórmula más arriba, llegamos a que:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\, g.t^2 + v_{0_y}.t + y_0$$
$$= -4{,}9\ m/s^2.(1{,}77s)^2 + 17{,}32\ m/\cancel{s}\ .1{,}77\ \cancel{s} + 2\ m$$
$$= -4{,}9\ m/\cancel{s^2}.\ 3{,}13\ \cancel{s^2} + 30{,}66\ m + 2\ m$$
$$= -15{,}33\ m + 32{,}66\ m = 17{,}33\ m$$

b) Será el tiempo tal que la altura sea igual a 0 (la pelota cae):

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\, g.t^2 + v_{0_y}.t + y_0$$
$$0 = -4{,}9\ m/s^2.t^2 + 17{,}32\ m/s\ .t + 2m$$
$$t = 3{,}64\ s$$

Observación:

*Notar que lo que se resuelve es una ecuación cuadrática (la incógnita es **t**). La otra solución es negativa; a nosotros no nos sirve considerar tiempos negativos, por eso es que tomamos la positiva.*

c) Para la velocidad deberemos calcular ambas componentes de la misma, es decir:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0\ .\ \cos\alpha$$
$$= 20\ m/s\ .\ \cos 60°$$
$$= 20\ m/s\ .\ 0{,}5 = 10\ m/s$$

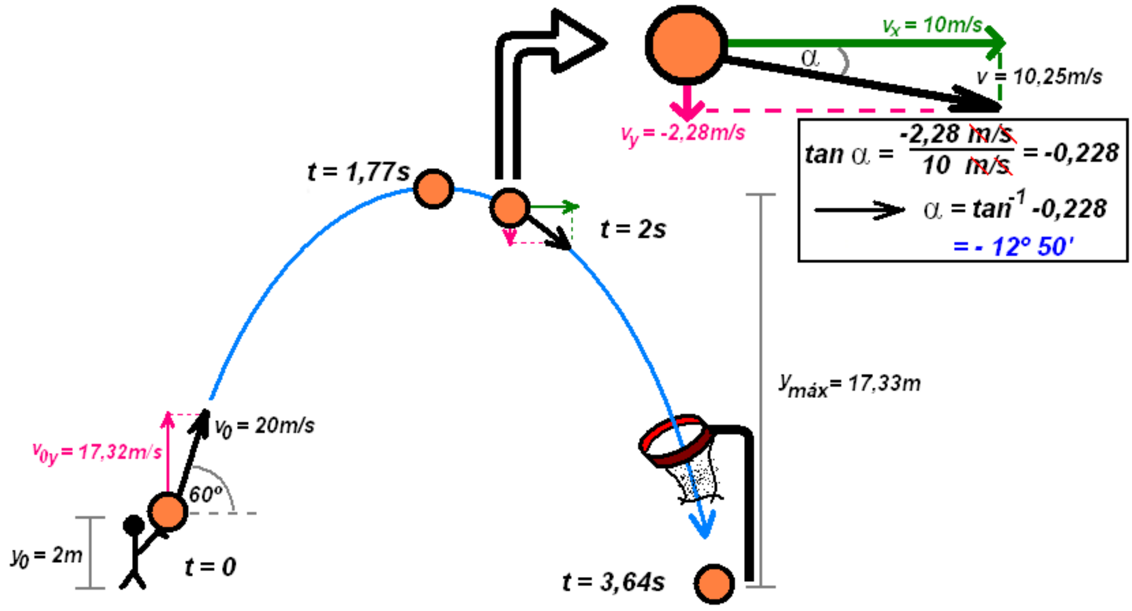
$$v_y(t) = -g.t + v_{0y}$$
$$= -9{,}8\ m/\cancel{s^2}.\ 2\ \cancel{s} + 17{,}32\ m/s$$
$$= -19{,}6\ m/s + 17{,}32\ m/s = -2{,}28\ m/s$$

Si recordamos que v_0 era la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos v_{0x} y v_{0y}, entonces por el *Teorema de Pitágoras*:

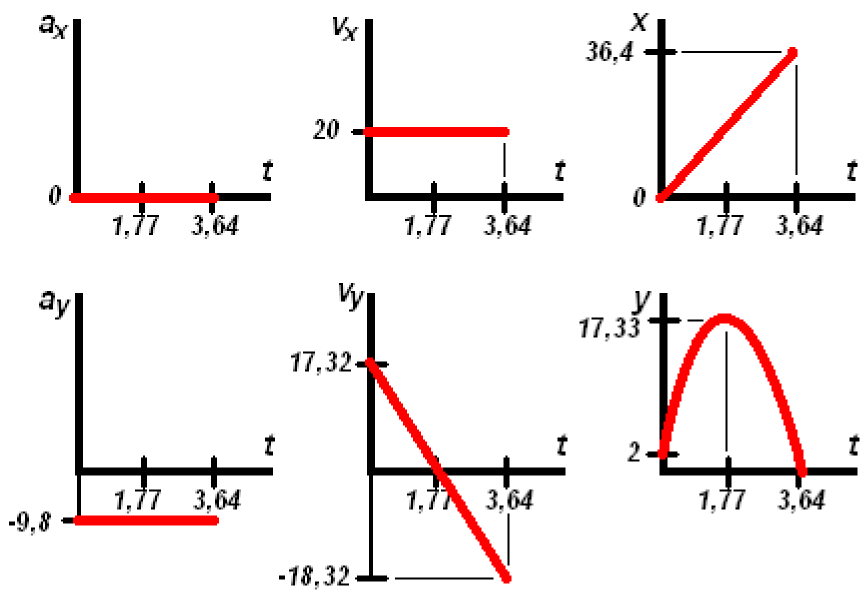
$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$
$$= \sqrt{100\ (m/s)^2 + 5{,}2\ (m/s)^2}$$
$$= \sqrt{105{,}2\ (m/s)^2} = 10.25\ m/s$$

Su ángulo, obviamente, es el arco tangente entre las componentes, y vale aproximádamente 13º por debajo de la horizontal.

Lo siguiente es una ilustración el ejercicio, con los datos conocidos y calculados.



También, se muestran las gráficas de las aceleraciones, velocidades y posiciones horizontales y verticales en función del tiempo.



Actividades

1. Un jugador de fútbol patea la pelota con un ángulo de 45º, y rapidez inicial de 20 m/s.

a) ¿Cuánto tarda en llegar la pelota hasta su máxima altura?
b) ¿Cuánto es esa altura?
c) ¿Cuál fue su alcance?
*(Llamamos **alcance** a la distancia horizontal que cubre la pelota hasta volver al suelo)*

2. Se lanza un objeto con velocidades iniciales v_{0x} = 4,9 m/s y v_{0y} = 9,8 m/s.

a) En el punto más alto de su vuelo, la magnitud de su velocidad es:

A) 0 *C)* $\sqrt{4{,}9^2}$ *m/s*

B) $\sqrt{9{,}8^2}$ *m/s* *D)* $\sqrt{4{,}9^2 + 9{,}8^2}$ *m/s*

b) Al pasar 0,5 segundos de ser lanzado, la magnitud de su velocidad es:

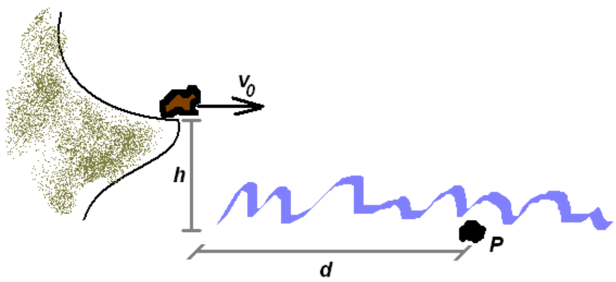
A) $\sqrt{(4{,}9 + 9{,}8)^2}$ *m/s* *C)* $\sqrt{4{,}9^2 + (9{,}8/2)^2}$ *m/s*

B) $\sqrt{(4{,}9/2)^2 + 9{,}8^2}$ *m/s* *D)* $\sqrt{(4{,}9/2)^2 + (9{,}8/2)^2}$ *m/s*

3. Diego se suicida nuevamente, pero ahora corriendo hasta el borde del edificio (que se recordará medía 50 m de altura) a 6 m/s.

a) Calculá el tiempo de vuelo.
b) Calculá la distancia desde el lugar en donde cae hasta el edificio.
c) Calculá la magnitud de su velocidad justo cuando llega al suelo.

4. Una piedra se desprende de un acantilado, rueda, sale disparada con una velocidad inicial v_0, y llega al punto *P* en el mar.

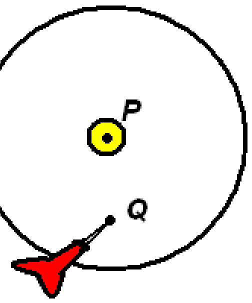


a) Si h = 20 m, calculá el tiempo en que la piedra cae al mar.
b) Si v_0 = 8 m/s, calcular d.

5. Matías, de pie en un colectivo en reposo, deja caer una moneda, la cual llega al piso del colectivo en 0,4 segundos. Luego, con el colectivo a 10 m/s en *MRU*, repite el experimento.

a) ¿Cuánto tarda la moneda en caer en el segundo experimento?
b) ¿Qué distancia hay entre ambos puntos de caída?

6. Se lanza horizontalmente un dardo al centro P del blanco con rapidez de 10 m/s. 0,19 segundos despues, el dardo queda pinchado en el punto Q, por debajo de P.

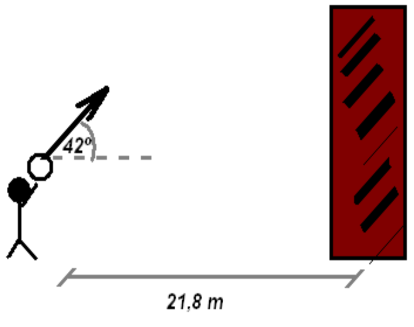


a) ¿Qué distancia hay entre P y Q?
b) ¿Qué distancia hay entre el lanzador y el blanco?

7. Un jugador de rugby patea el balón de modo que éste permanece en el aire 4,5 segundos, y cae a una distancia de 45,7 m.
¿Cuál fue (la magnitud y dirección de) su velocidad inicial?

8. Una pelota de baseball sale horizontalmente de la mano del lanzador con una rapidez de 100 km/h hacia un bateador que está a 20 m de distancia.

a) ¿Cuánto tarda la pelota en recorrer los primeros 10 m?
¿Cuánto en los segundos 10 m?
b) ¿Cuánto cae la pelota en los primeros 10 m?
¿Cuánto en los segundos 10 m?



9. Arrojás una pelota con 25,3 m/s de rapidez, en un ángulo de 42º, hacia una pared que está a 21,8 m y que mide 100 m de altura.

a) ¿Cuánto tiempo vuela hasta chocar?
b) ¿Qué diferencia de alturas hay entre el punto de lanzamiento y el punto donde choca?
c) ¿Cuál es su velocidad al chocar?
d) Al chocar, ¿ya había pasado su altura máxima?

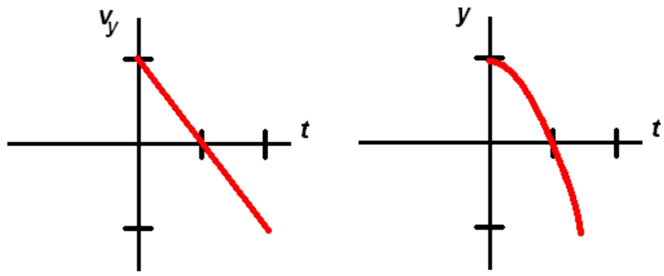
10. Una pelota está rodando con velocidad constante sobre una mesa de 2 m de altura. A los 0,5 segundos de haber dejado la mesa, está a 0,2 m de ella.

a) ¿Qué velocidad tenía al salir de la mesa?
b) ¿A qué distancia de la mesa estará al llegar al suelo?
c) ¿Cuál era su distancia al suelo a los 0,5 segundos de dejar la mesa?

11. Grafica las siguientes funciones:

a) del Ejercicio ***3***, $\boldsymbol{v_x(t)}$ e ***y(t).***
b) del Ejercicio ***7***, $\boldsymbol{v_y(t)}$ y ***x(t).***

12. ¿Es posible que los dos gráficos siguientes correspondan al movimiento de un mismo cuerpo? ¿Por qué?



¿Y estos otros dos? ¿Por qué?